Lycée Laymoune — Devoir surveillé n°1 — [2021/2022]

2ème BAC PC — Modèle : n° 3 — / Semestre 1 /



EXERCICE 1 : Soit f la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

① Montrer que f est dérivable sur I et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{3}{2(x+2)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}}$

② Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 2$

③ Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_1 = 1$ puis interpréter géométriquement le résultat.

④ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

⑤ Vérifier que f^{-1} est définie et strictement croissante sur $J =]0; 1[$

⑥ Vérifier que : $(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+1}{1-x^2}$

⑦ Calculer $f(2)$ puis $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

EXERCICE 2 :

1) Calculer les limite : ⓐ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x+4}-2}{4-x}$ ⓑ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$

3) Comparer $\alpha = \sqrt[5]{5}$ et $\beta = \sqrt[3]{3}$

4) Simplifier : $A = \dfrac{\sqrt[7]{a^{10}} \times \sqrt[14]{a^{-6}} \times \sqrt{\sqrt[3]{a^6}}}{\sqrt[6]{\sqrt{a^4}} \times \sqrt[3]{a^2}}$; (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$)

EXERCICE.3 on considère l'équation :

$$(E) : \quad x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = 0$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution $\alpha \in]-1; 0[$

2°/ Montrer que (E) n'admet pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.

3°/ Vérifier que : $1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 > 0$

4°/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

— ★ fin ★ —

2ème Bac. Science — Semestre I — [2021 2022]

Correction du D.S [modèle] n°3

Ex. 1 :

$\forall x \in I =]1, +\infty[; \; f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

① Soit $x \in I$ donc : $x > 1$

on a : $\begin{cases} x-1>0 \\ x+2 > 1+2 > 0 \end{cases}$ donc : $\boxed{\dfrac{x-1}{x+2} > 0}$

donc $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ est $\boxed{>0}$ sur I

g est dérivable sur I (car g est une fonction rationnelle défini sur I) donc : $f = \sqrt{g}$ est dérivable sur I.

Rappel : $f = \sqrt{g}$

si $\begin{cases} (\forall x \in I) \; g(x) > 0 \\ g \text{ dérivable sur } I \end{cases}$

alors f est dérivable sur I

et on a : $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$(\forall x \in I) ; \; f'(x) = \left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}\right)'$

$= \dfrac{\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}} = \dfrac{\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}}$

$= \dfrac{2-(1\times(-1))}{2(x+2)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}}$ donc :

$(\forall x \in I) \; f'(x) = \dfrac{3}{2(x+2)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}}$

② on a : $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

avec : $f'(2) = \dfrac{3}{2(2+2)^2 \times \sqrt{\dfrac{2-1}{2+2}}}$

$= \dfrac{3}{2 \times 16 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{3}{16}$

$f(2) = \sqrt{\dfrac{2-1}{2+2}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ donc :

$(T) : y = \dfrac{3}{16}(x-2) + \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{3}{16}x - \dfrac{6}{16} + \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{3}{16}x - \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}$

$\boxed{(T) : y = \dfrac{3}{16}x + \dfrac{1}{4}}$

③ Dérivabilité de f à droite en $x_1 = 1$

on a : $f(1) = \sqrt{\dfrac{1-1}{1+2}} = \sqrt{\dfrac{0}{3}} = \sqrt{0} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^>} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^>} \dfrac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} - 0}{x-1}$

(on a : $x-1>0$ donc : $x-1 = \sqrt{(x-1)^2}$)

$= \lim\limits_{x \to 1^>} \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}} \times \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^>} \sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2} \times \dfrac{(x-1)}{x+2}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^>} \sqrt{\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}} = \boxed{+\infty}$

car : $\lim\limits_{x \to 1^>} \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \text{"}\dfrac{1}{0^+}\text{"}$

donc f n'est pas dérivable à droite en x_1.

<u>Interprétation</u> : $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe (oy) au point d'abscisse $x_1 = 1$.

(c-à-d au point : $A(1 ; 0)$)

(4) f continue sur I (car dériv sur I)

d'après (1) on a : $(\forall x\in I) ; f'(x) > 0$

donc f est strictement ↗ sur I.

donc f admet une fct réciproque f^{-1}.

(5) f^{-1} est définie sur $J = f(I)$

$= f(]1,+\infty[)$

$=]\lim_{1^+} f \,;\, \lim_{+\infty} f[$ (car f est ↗)

on a : $\lim_{x \to 1^>} \frac{x-1}{x+2} = \frac{0}{3} = 0$

donc : $\lim_{1^+} f = \lim_{x\to 1^>} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \sqrt{0} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ donc :

$$\boxed{J =]0;1[}$$

f est strictement ↗ sur I

donc : $\boxed{f^{-1} \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } J}$

(6) Soient $x \in]0;1[$; $y \in]1,+\infty[$

$f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$

$\iff \sqrt{\frac{y-1}{y+2}} = x \iff \frac{y-1}{y+2} = x^2$

$\iff y - 1 = yx^2 + 2x^2$

$\iff y(1-x^2) = 1 + 2x^2$

on a : $1 - x^2 \neq 0$ (car $0 < x^2 < 1$)

on trouve : $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

c.à.d : $(\forall x \in J)\ f^{-1}(x) = \frac{2x^2+1}{1-x^2}$

(7) $f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{2+2}} = \frac{1}{2}$

$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = (f^{-1})'(f(2))$

$= \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{16}\right)} = \boxed{\frac{16}{3}}$

EX.2 :

1] (a) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - 2}{4-x}$ $= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ F.I

$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^3 - (2)^3}{(4-x)\left(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 2^2\right)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{x+4-8}{-(x-4)\left(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 4\right)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{-(x-4)\left(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 4\right)}$

$= \frac{1}{-(2^2 + 2\times 2 + 4)} = \boxed{\frac{-1}{12}}$

(b) $\lim_{x\to 1^>} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$

(directement on trouve "$\frac{0}{0}$" F.I)

on a : $x - 1 > 0$ (car $x > 1$)

donc : $x - 1 = \sqrt[3]{(x-1)^3}$

donc : $\lim_{x\to 1^>} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^>} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{(x-1)^3}}$

$= \lim_{x\to 1^>} \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)^2}}$

$= \lim_{x\to 1^>} \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} = \boxed{+\infty}$

car $\lim_{x\to 1^>} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{2}{0^+}\text{"} = +\infty$

2/ $\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$

(on cherche tout d'abord D l'ensemble de définition de l'inéquation)

$x \in D \Longleftrightarrow x^2+4x \geq 0$

tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

≥ 0 ≥ 0

donc : $D =]-\infty;-4] \cup [0;+\infty[$

Soit $x \in D$; on a :

$\sqrt[6]{9} = \sqrt[2\times3]{3^2} = \sqrt[3]{3}$ donc :

$\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$

$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{x^2+4x} > \sqrt[3]{3}$

$\Longleftrightarrow x^2+4x > 3 \Leftrightarrow x^2+4x-3 > 0$

pour l'inéquation $x^2+4x-3 > 0$

on a : $\Delta = 16 - 4(-3)$
$= 16+12 = 28 > 0$

$(\sqrt{\Delta} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7})$

deux solution :

$x_1 = \frac{-4-2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(-2-\sqrt{7})}{2} = -2-\sqrt{7}$

$x_2 = \frac{-4+2\sqrt{7}}{2} = -2+\sqrt{7}$

Tableau de signe (de la 2ème inéquation)

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{7}$		$-2+\sqrt{7}$		$+\infty$
x^2+4x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

>0 >0

donc :

($x \in D$ et $x \in]-\infty;-2-\sqrt{7}[\cup]-2+\sqrt{7};+\infty[$)

(droite graduée : $-2-\sqrt{7}$, -4, 0, $-2+\sqrt{7}$)

(x = "rouge et vert en même temps")

donc : $x \in]-\infty;-2-\sqrt{7}[\cup]-2+\sqrt{7};+\infty[$ — ensemble des solution

3/ on a : $\alpha = \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[15]{125}$

$\beta = \sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243}$

$125 < 243$ donc : $\boxed{\alpha < \beta}$

4/ Soit $a \in]0,+\infty[$. on a :

$\sqrt[7]{a^{10}} \times \sqrt[14]{a^{-6}} \times \sqrt{\sqrt[3]{a^6}}$

$= a^{\frac{10}{7}} \times a^{\frac{-6}{14}} \times \sqrt[2]{\sqrt[3]{a^6}}$

$= a^{\frac{10}{7}} \times a^{-\frac{3}{7}} \times \sqrt[6]{a^6}$

$= a^{\frac{7}{7}} \times a = a^1 \times a = a^2$

et $\sqrt[6]{\sqrt{a^4}} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{\sqrt[2]{a^4}} \times a^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[12]{a^4}\, a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{12}} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^1$

donc : $A = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = \boxed{a}$

EX. 3 (E) : $x^7+x^5+x^3+x+1=0$

1/ posons : $f(x) = x^7+x^5+x^3+x+1$

f est continue sur $[-1;0]$

$f(0) = 1 > 0$ et $f(-1) = -3 < 0$ donc :

$f(0) \times f(-1) < 0$

d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]-1;0[$

donc (E) admet une solution $\alpha \in]-1;0[$.

2°/ on a : $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) > 0$

(car : $x^6 \geqslant 0$; $x^4 \geqslant 0$; $x^2 \geqslant 0$ et $1 > 0$)

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc α est la seule solution de l'équation : (c-à-d (E) n'admet pas d'autre solution)

3°/ on a : $\alpha \in]-1;0[$

donc : $\alpha < 0$ donc $\alpha^7 < 0$

et α solution de (E) ; c-à-d :

$\alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + 1 = 0$

donc : $-\alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5$

$\underbrace{-\alpha^7 > 0}_{\text{car } \alpha^7 < 0} \Longrightarrow \boxed{1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 > 0}$

4°/ Soit $n \in \mathbb{N}$.

on a : $-1 < \alpha < 0$

donc : $\alpha + 1 > 0$

et $\alpha^{2n} > 0$ donc :

$\alpha^{2n}(\alpha + 1) > 0$

on trouve : $\alpha^{2n} \times \alpha + \alpha^{2n} > 0$

c-à-d : $\alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

— * fin * —